



Autour de la décomposition dyadique

Claire David

► To cite this version:

| Claire David. Autour de la décomposition dyadique. 2012. hal-00765678

HAL Id: hal-00765678

<https://hal.science/hal-00765678>

Preprint submitted on 15 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Autour de la décomposition dyadique

Claire David

15 décembre 2012

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

On rappelle qu'un nombre dyadique est une fraction rationnelle de la forme $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Considérons maintenant l'ensemble des rationnels dyadiques, i.e. de la forme $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Une propriété remarquable de l'ensemble des rationnels dyadiques est sa densité dans \mathbb{R} :

tout nombre réel est donc limite d'une suite de nombres rationnels dyadiques. Ainsi, tout réel r peut être approché à $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, par ses valeurs approchées dyadiques par défaut et par excès ; comme

$$E(2^n r) - 1 < E(2^n r) \leq 2^n r \leq E(2^n r) + 1 \quad (1)$$

on obtient en effet :

$$\frac{1}{2^n} E(2^n r) - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} E(2^n r) \leq r < \frac{1}{2^n} E(2^n r) + \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

On rappelle aussi que tout réel r de l'intervalle $[0, 1[$ admet un développement en base 2 de la forme :

$$r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \quad , \quad r_n \in \{0, 1\} \quad (3)$$

L'intérêt d'une décomposition en base 2, qui est binaire - des 0 et des 1 - est la facilité d'application à des calculs numériques - l'ordinateur ne faisant que du binaire. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, qui est une des motivations de la théorie des ondelettes.

Considérons maintenant l'espace \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$.

La topologie de \mathbb{R}^d fait, naturellement, appel à la boule unité $\mathcal{B}(0, 1)$, qui permet facilement de se « repérer » dans \mathbb{R}^d : il y a les éléments situés à l'intérieur de cette boule, et les autres.

Utilisons, maintenant, les nombres dyadiques pour cette topologie. Pour commencer, considérons les valeurs approchées dyadiques de 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{2^n} E(2^n r) - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} E(2^n r) \leq r < \frac{1}{2^n} E(2^n r) + \frac{1}{2^n} \quad (4)$$

et, en particulier, pour $n = 2$:

$$\frac{1}{2^2} E(2^2) - \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^2} E(2^2) \leq 1 < \frac{1}{2^2} E(2^2) + \frac{1}{2^2} \quad (5)$$

et donc, bien évidemment :

$$1 - \frac{1}{2^2} \leq 1 < 1 + \frac{1}{2^2} \quad (6)$$

puis :

$$\frac{3}{4} \leq 1 \quad (7)$$

ce qui conduit à considérer non plus la boule unité, mais la boule $\mathcal{B}(O; \frac{3}{4})$.

Cherchons maintenant à obtenir un recouvrement de \mathbb{R}^d par des couronnes « dyadiques », centrées en O , dont le rayon intérieur tende vers zéro, et sur lesquelles on puisse définir des distributions à supports disjoints. Il est naturel, pour la première couronne, de choisir $\frac{3}{4}$ comme rayon intérieur. Tout élément x de cette couronne sera donc tel que :

$$\|x\| \geq \frac{3}{4} \quad (8)$$

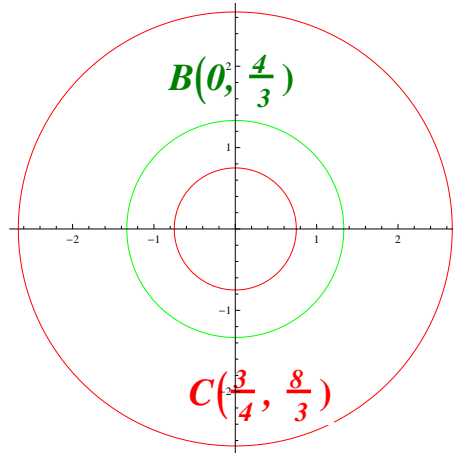
L'idée du recouvrement et des « supports à disjoindre » conduit alors à considérer, en même temps, les éléments x' tels que :

$$\|x'\| \leq \frac{3}{4} \quad (9)$$

soit :

$$\frac{1}{\|x'\|} \geq \frac{4}{3} \quad (10)$$

et, par là-même, la boule $\mathcal{B}(O; \frac{4}{3})$.



La boule $\mathcal{B}(O; \frac{4}{3})$ et la couronne $\mathcal{C}(O; \frac{3}{4}, \frac{8}{3})$

Pour tout réel positif r , il existe un entier naturel n_r tel que :

$$2^{n_r+2} \leq 3r \leq 2^{n_r+3} \quad (11)$$

et donc :

$$2^{n_r} \frac{4}{3} \leq r \leq 2^{n_r} \frac{8}{3} \quad (12)$$

puis :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{r}{2^{n_j}} \leq \frac{8}{3} \quad (13)$$

Ainsi, pour tout x de \mathbb{R}^d , il existe un entier n_x tel que :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{\|x\|}{2^{n_x}} \leq \frac{8}{3} \quad (14)$$

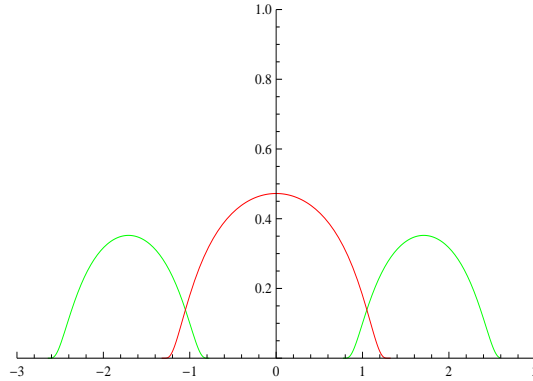
ce qui signifie que $\frac{x}{2^{n_x}}$ appartient à la couronne $\mathcal{C}\left(O; \frac{3}{4}; \frac{8}{3}\right)$.

x appartient donc à la couronne $\mathcal{C}\left(O; 2^{n_x} \frac{3}{4}; 2^{n_x} \frac{8}{3}\right)$.

Tout élément de \mathbb{R}^d peut donc être « localisé » dans une couronne de la forme $\mathcal{C}\left(O; 2^n \frac{3}{4}; 2^n \frac{8}{3}\right)$.

Cela amène alors naturellement à la décomposition dyadique de l'unité [1] : il existe deux fonctions radiales $\chi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{B}\left(O; \frac{4}{3}\right)\right)$ et $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{C}\left(O; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)\right)$, à valeurs dans $[0, 1]$, telles que, pour tout ξ de \mathbb{R}^d :

$$\chi(x) + \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1 \quad (15)$$



Les fonctions φ et χ .

1 Application à la théorie des profils

L'idée est la suivante : montrer que la solution des équations de Navier-Stokes se décompose sous forme « dyadique » de la façon suivante :

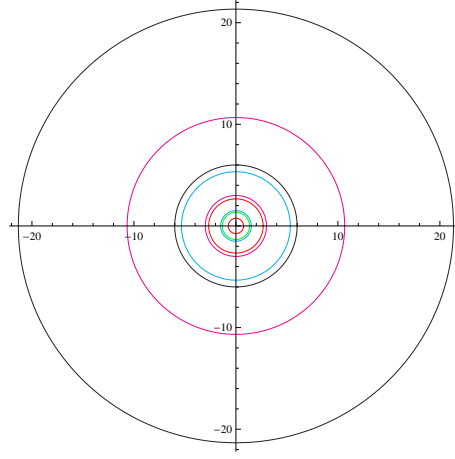
i. Dans le cas de « non-explosion » :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \mathcal{NS}\left(\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}\right)(x, t) \quad , \quad n \in N^* \quad (16)$$

où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2\}$:

$\forall i \in \{1, 2\}$:

$$\sigma(i) \in \{1, 2\} \quad (17)$$



Les couronnes

et où, pour tout entier n de $\{1, \dots, N\}$, $n \leq N$, et tout i de $\{1, 2\}$, $\sigma^k(i)$ désigne l'itérée $k^{\text{ème}}$ de $\sigma(i)$.

$\mathcal{NS}(\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i))$ désigne la solution de l'équation de Navier-Stokes associée au profil $\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i)$, et

$$\frac{1}{\lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i)} \Lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i) \mathcal{NS}(\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i))(x, t) = \mathcal{NS}(\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i)) \left(\frac{t}{\lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}^2\sigma^n(i)}, \frac{x - x\lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i)}{\lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i)} \right) \quad (18)$$

Pour alléger les écritures, on notera désormais :

$$\gamma_{i,\sigma^n(i)} \quad (19)$$

pour

$$\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i) \quad (20)$$

et

$$\Lambda_{i,\sigma^n(i)} \quad (21)$$

pour

$$\Lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{n-1}(i)}\sigma^n(i) \quad (22)$$

Les profils intervenant dans cette décomposition sont définis de façon récursive et orthogonale, par :

$$\gamma_1 \in \mathcal{B}(0, 1) \quad , \quad \gamma_2 \in \mathcal{C}_1 \quad (23)$$

où \mathcal{C}_1 est la couronne dyadique $\mathcal{C}\left(O; \frac{r_{int}}{2}; 2r_{ext}\right)$, puis :

$$\gamma_{1,1} \in \mathcal{B}(0, 1)+ \quad , \quad \gamma_{1,2} \in \mathcal{C}_1+ \quad (24)$$

ii. Dans le cas de l'« explosion », la solution présente une structure « fractale », de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \Lambda_{i,\sigma^\infty(i)} \mathcal{NS}(\gamma_{i,\sigma^\infty(i)})(x, t) \quad (25)$$

avec des notations analogues à celle du i :

$$\gamma_{i,\sigma^\infty(i)} \quad (26)$$

pour

$$\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^\infty(i)} \quad (27)$$

et :

$$\Lambda_{i,\sigma^\infty(i)} \quad (28)$$

pour

$$\Lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^\infty(i)} \quad (29)$$

Note : dans ce qui suit, on démontre la décomposition dans le cas $N = 2$, mais la démonstration est la même pour $N > 2$. Le but est de considérer des décompositions pour N entier quelconque.

Définition 1.1. Sous-profils

On appelle **sous-profil** un champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \tilde{\gamma}(x)$ auquel on puisse, par construction, associer deux profils γ_j , $j = 1, 2$, deux cœurs x_j , $j = 1, 2$, et deux échelles λ_j , $j = 1, 2$, vérifiant les conditions d'orthogonalité :

$$j \neq j' \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} + \frac{\lambda_{j'}}{\lambda_j} \right) = +\infty \\ \text{ou} \\ \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_j - x_{j'}|}{\lambda_j} = +\infty \end{cases} \quad (30)$$

Définition 1.2. Voisinage extérieur d'une boule

On appellera voisinage extérieur d'ordre $\varepsilon > 0$ d'une boule $\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, r_{\mathcal{B}})$, de centre $x_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^d$, de rayon $r_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, r_{\mathcal{B}})} + \varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, r_{\mathcal{B}})} \quad , \quad r_{\mathcal{B}} < |x - x_{\mathcal{B}}| < r_{\mathcal{B}} + \varepsilon \right\} \quad (31)$$

Définition 1.3. Voisinage extérieur d'une couronne

On appellera voisinage extérieur d'ordre $\varepsilon > 0$ d'une couronne $\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})$, de centre $x_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^d$, de rayon intérieur $r_{\mathcal{C}}^{int} \in \mathbb{R}^*$, de rayon extérieur $r_{\mathcal{C}}^{ext} \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})} + \varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})} \quad , \quad r_{\mathcal{C}}^{ext} < |x - x_{\mathcal{C}}| < r_{\mathcal{C}}^{ext} + \varepsilon \right\} \quad (32)$$

Dans un premier temps, montrons que tout champ de vecteurs de l'espace \mathbb{R}^d ($d = 3$), $x \mapsto v(x)$, donnée initiale de l'équation de \mathcal{NS} , est la somme d'une série de sous-profils $\tilde{\gamma}_i$, $i \in \mathbb{N}$. On cherche à

en déduire la densité de « l'espace des profils » dans \mathbb{R}^d , ce qui revient finalement à « orthogonaliser » la famille de sous-profils.

Grâce à la décomposition dyadique, on écrit, dans un premier temps, pour tout x de \mathbb{R}^d :

$$v(x) = v(x) \chi(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right) \quad (33)$$

où $\chi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{B}\left(0, \frac{4}{3}\right)\right)$ et $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{C}\left(0; \frac{3}{4}, \frac{8}{3}\right)\right)$

On notera, dans ce qui suit, $\mathcal{B}_u = \mathcal{B}\left(0, \frac{4}{3}\right)$, qui est donc notre « boule unité », et, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{C}_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^d / \frac{3}{4} \leq \left| \frac{x}{2^j} \right| \leq \frac{8}{3} \right\} \quad (34)$$

(Je n'exclus pas de renormaliser et considérer la boule unité et des couronnes plus « naturelles ».)

Grâce au recouvrement de \mathbb{R}^d par la boule \mathcal{B}_u et les couronnes dyadiques \mathcal{C}_j , $j \in \mathbb{N}$, on a donc une « décomposition dyadique en champs de vecteurs » du champ de vecteurs v .

Au champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \chi(x)$, qui est donc solution de \mathcal{NS} sur la boule \mathcal{B}_u , on associe la décomposition en profils

$$v(x) \chi(x) = \frac{1}{\lambda_{1,0}} \varphi^1\left(\frac{x - x_{1,0}}{\lambda_{1,0}}\right) + \frac{1}{\lambda_{2,0}} \varphi^2\left(\frac{x - x_{2,0}}{\lambda_{2,0}}\right) + \psi_0^2(x) \quad (35)$$

où $x_{1,0} \in \mathcal{B}_u$ et $x_{2,0} \in \mathcal{C}_N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \gg 1$, et $\lambda_{2,0} = \lambda_{1,0}$, de façon à ce que les conditions d'orthogonalité soient vérifiées. Le sous-profil $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \chi(x)$ se décompose donc en somme de deux profils, modulo un reste.

Il s'agit ensuite de déterminer une décomposition du deuxième sous-profil $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^1}\right)$ en somme de deux profils $\frac{1}{\lambda_{1,1}} \varphi^1\left(\frac{x - x_{1,1}}{\lambda_{1,1}}\right) + \frac{1}{\lambda_{1,2}} \varphi^2\left(\frac{x - x_{2,1}}{\lambda_{2,1}}\right)$, modulo un reste ψ_1^2 , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité avec les deux premiers profils soient vérifiées : on choisit de considérer un premier cœur $x_{1,1}$ situé dans un voisinage extérieur d'ordre $\frac{1}{2^N}$ de la forme $\overline{\mathcal{B}_u} + \frac{1}{2^N}$ de $\overline{\mathcal{B}_u}$, deux échelles $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = 2^N \lambda_{1,0}$, et un second cœur $x_{2,1}$ situé dans un voisinage extérieur de $\overline{\mathcal{C}_N}$.

On construit alors la décomposition du troisième sous-profil $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^2}\right)$ en somme de deux profils $\frac{1}{\lambda_{2,1}} \varphi^2\left(\frac{x - x_{2,1}}{\lambda_{2,1}}\right) + \frac{1}{\lambda_{2,2}} \varphi^2\left(\frac{x - x_{2,2}}{\lambda_{2,2}}\right)$, modulo un reste ψ_2^2 , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité avec les quatre premiers profils soient vérifiées : on choisit de considérer le cœur $x_{2,1}$ situé dans un voisinage extérieur de la forme $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_1 + \frac{1}{2^N}$ de $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_1$, deux échelles $\lambda_{2,1} = \lambda_{2,12} = 2^N \lambda_{1,1} = 2^{2N} \lambda_{1,0}$, et un second cœur $x_{2,2}$ situé dans un voisinage extérieur de la forme $\overline{\mathcal{C}_{N+1}} + \frac{1}{2^N}$ de $\overline{\mathcal{C}_{N+1}}$.

De proche en proche, par récurrence, on obtient ainsi une suite de profils $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$, et une suite de restes $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$, conduisant à la décomposition dyadique suivante, pour tout x de l'espace \mathbb{R}^d :

$$v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n\left(\frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}}\right) + \psi_n(x) \right\} \quad (36)$$

où, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{2,n} = 2^N \lambda_{1,n-1} \quad (37)$$

avec $x_{1,n}$ situé dans un voisinage extérieur de la forme $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_n + \frac{1}{\lambda_{i,n}}$ de $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_n$, et $x_{2,n}$ situé dans un voisinage extérieur de $\overline{\mathcal{C}_{N+1}}$.

Il reste à montrer deux choses :

- i.* la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left(\frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right)$;
- ii.* la convergence de la somme des restes $\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)$ vers 0 ; a priori, cette convergence est assurée par le fait que :

Références

- [1] J.Y. Chemin et al., Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Springer, 2011.

Définition 1.4. Deux transformations linéaires f et g de \mathbb{R}^3 , de matrices associées A_f et A_g , sont dites *conjuguées* s'il existe une transformation linéaire bijective φ de \mathbb{R}^3 , de matrice associée A_φ , appelée *conjugaison*, telle que :

$$f \circ \varphi = \varphi \circ g \quad (38)$$

ce qui, matriciellement, se traduit par :

$$A_f A_\varphi = A_\varphi A_g \quad (39)$$

ou encore, puisque A_φ est inversible :

$$A_g = A_\varphi^{-1} A_f A_\varphi \quad (40)$$

Les matrices A_f et A_g sont dites *semblables*.